1 Newton Mechanik

Definition Impuls:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$$

Definition Kraft:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

1. Newton Axion
Ein Körper bewegt sich bei Abwesenheit äusserer Kräfte gradlinig:

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

$$\vec{p} = const$$

2. Newton Axtion (Newon'sche Bewegungsgleichung)

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m(t)\ddot{\vec{r}}$$

3. Newton Axtion (actio=reactio)

$$F = -F$$

Die Summe aller Kräfte eines abgeschlossenen Systems ist Null.

1.1 Zentralkäfte

Normalerweise Betrachtung in Polarkoordinaten. ($\vec{r} = \vec{r}(r, \varphi)$)
$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r \cos\varphi + \vec{e}_\varphi \sin\varphi$
$\vec{e}_\varphi = \frac{\vec{r}}{r} = -\vec{e}_r \sin\varphi + \vec{e}_\varphi \cos\varphi$
$\vec{e}_x = \vec{e}_r \cos\varphi - \vec{e}_\varphi \sin\varphi$
$\vec{e}_y = \vec{e}_r \sin\varphi + \vec{e}_\varphi \cos\varphi$
$\dot{\vec{e}}_r = -\sin\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_x + \cos\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_y = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
$\dot{\vec{e}}_\varphi = \cos\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_x - \sin\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_y = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$
Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
Zentralkraft: $\vec{F}(r) = f(r)\vec{e}_r$
Falls $f(r)$ integrabel: $-\nabla U(r) = \vec{F}(r)$
Allgemeine Bewegungsgleichung: $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r) = -\nabla U(r)$
In einem abgeschlossenen System ohne Reibung gilt: $E = T + U = const$
Definition Drehimpuls:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

Trennung der Schwerpunktsbewgung und der inneren Bewegung:

$$\vec{L} = \underbrace{M\vec{R}_S \times \dot{\vec{R}}}_{=\vec{L}_S} + \underbrace{\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}_{=\vec{l}}$$

Satz:
Für ein Zweikörpersystem mit Zentralkraft ist der Relativdrehimpuls $\vec{l}$ eine Erhaltungsgröße: $\frac{d}{dt}\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{l} \perp \vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$

$l_z = \mu r^2 \dot{\varphi} = const$
Energie:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Bahnkurven:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\mu}\int\limits_{r_0}^{r} dr' \frac{1}{r'}\sqrt{\frac{M}{2(E - U(r')}}$$

Durch bilden der Umkehrfunktion folgt daraus $r(\varphi)$
Effektives Potential: $V = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$

Kepler-Problem:
$U(r) = -\frac{k}{r}$ mit $k = Gm_1m_2$
$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$
Damit ergibt sich fuer $\varphi(r)$:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\mu}\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'} \frac{l}{\sqrt{2\mu(E + \frac{k}{r}) - \frac{l^2}{r}}}$$

$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \arccos\frac{\frac{p}{r}-1}{\varepsilon}$
Mit Bahnparameter $p = \frac{l^2}{k\mu} = b\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 + 2E - \frac{l^2}{\mu k^2}}$ wähle Anfangsbedingungen so, dass $\varphi_0 = const$:

$$\varphi(r) = \arccos\frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon}$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \sqrt{pa} = \frac{k}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

Bahngleichung in kartesischen Koordinaten (Elipsengleichung):

$$\frac{(x + a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Anm: $\varepsilon = 0 \cong$ Kreis; $0 < \varepsilon < 1 \cong$ Elipse; $\varepsilon = 1 \cong$ Parabel; $\varepsilon > 1 \cong$ Hyperbel

1.1.1 Kepler'sche Gesetze

1. Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem Brennpukt.
2. Die vom Fahrstrahl pro Zeit üeberstrichene Fläche ist konstant.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional zur dritten Potenz der grossen Halbachse.
4. Das Verhältnis der Kuben der großen Halbachsen zum Quadrat der Umlaufzeiten ist für alle Planeten eines Sonnensystems gleich.

1.2 Streuung

Genereller Aufbau: Ein Teilchenstrahl wird an einem Streuzentrum gestreut und mit einem Detektor bei verschiedenen Streuwinkeln nachgewiesen.
Elastische Streuung

vorher: Impulse: $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ und $\vec{p}_2 = 0$
nachher: Impulse: $\vec{p'}_1 = m_1\vec{v'}_1$ und $\vec{p'}_2 = m_2\vec{v'}_2$
Impulserhaltung und Energieerhaltung:

$$\vec{p}_1 = \vec{p'}_1 + \vec{p}'_2 = \text{const}$$

$$E = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} = \frac{\vec{p'}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p'}_2^2}{2m_2}$$

Streuwinkel: Θ

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P'}_1 = |\vec{p}_1||\vec{P'}_1| \cos\Theta$$

Streuung eines Teilchens an einem Zentralpotential

$U(r),\ r = |\vec{r}|,\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
Annahme: $U(r \to \infty) \to 0$
Stoßparameter: b; Steuwinkel: Θ; Einfallswinkel: φ_0
$\Theta = 180° - 2(\varphi_0) = \pi - 2\varphi_0$

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{l}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{l^2}{r^2}}}$$

Energie: $\vec{v}_\infty = |\dot{\vec{r}}|,\ r \to \infty$ vonlinks$E = \frac{m}{2}v_\infty^2$
Drehimpuls: $l = |\vec{r} \times \vec{p}| = mbv_\infty$
dN: Zahl der in das Winkelintervall $[\Theta, \Theta + d\Theta]$ gestreuten Teilchen
$n : \frac{\text{Zahl der einfallenden Teilchen}}{\text{Fläche * Zeit}}$

$$d\sigma = \frac{dN(\Theta)}{n}$$

Annahme: eindeutige Beziehung $b(\Theta)$
$\Rightarrow dN = 2n\pi bdb$

$$d\sigma = 2\pi bdb$$

$d\Omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta) = \frac{b}{\sin\Theta}|\frac{db}{d\Theta}|$$

Totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{Tot} = 2\pi \int_0^{b_{max}} bdb$

oder $\sigma_{tot} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$

Streuung an einem $\frac{1}{r}$ Potential

Potential: $U(r) = \frac{\alpha}{r}$; Reduzierte Masse $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
Bahn des Teilchens ist eine Hyperbel (vgl. Kepler)

$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ mit $p = \frac{l^2}{|\alpha|m}$ und $\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}}$
aus $l = mbv_\infty$ und $E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1+\left(\frac{2Eb}{\alpha}\right)^2}$
$r \to \infty \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2Eb}{\alpha}\right)^2}}$
$\Longrightarrow b(\Theta) = \frac{|\alpha|}{2E}\cot\frac{\Theta}{2}$

Differentieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}$

Konservative Kräfte und Arbeit
Definition: Eine Kraft heißkonservativ, wenn sie sich als GRADIENT eines Potentials U darstellen läßt. Bzw. wenn die Rotation der Kraft Null ist.
Definition: "Arbeitsintegral" Weginteral über die Kraft $\vec{F}$ entlang einer Bahn S
$W_{12} = \int\limits_S d\vec{s}\vec{F}(\vec{s}) = -\int\limits_S d\vec{s}\nabla U(\vec{s})$

In einem konservativen Kraftfeld (ohne dissipative Kräfte wie Reibung etc) gilt die Energieerhaltung $E = T + U$

1.3 Vielteilchensysteme

Gesamtmasse $M = \sum\limits_i m_i$; Geschwindigkeiten $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$; Impulse $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$
Kräfte: a.) innere Kraft zwischen zwei Teilchen $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}(i \neq j)$
b.) äussere Kräfte auf das $i$te Teilchen $\vec{F}_i = m_i\ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{p}}_i$

Schwerpunkt des Vielteilchensystems

$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum\limits_i m_i\vec{r}_i$
$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ex}$ für ein abgeschlossenes System gilt $\vec{F}^{ex} = 0$
Drehimpuls (in einem Abgeschlossenen System ist der Drehimpuls eine Konstante der Bewegung)

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ex} = \vec{M}^{ex}$$

1.4 Der Virialsatz

...Aussage über zeitliche Mittelwerte der kinetsichen und potentiellen Energie von Vielteilchensystemen
Def: zeitliches Mittel einer Größe $f(t)$:

$$< f >= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau dt f(t)$$

Bewegungsgleichung mit $\vec{r}_i$ multiplizieren:
$\sum\limits_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\vec{r}_i = \sum\limits_i \vec{F}_i\vec{r}_i$
Annahme konservativer Kräfte und eines abgeschlossenen Systems:

$$\Rightarrow \sum_i \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i\vec{r}_i) - \underbrace{\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}_{2T} = \sum_i \vec{r}_i\vec{F}_i$$

$$< \frac{d}{dt}\sum_i m_i(\vec{r}_i\dot{\vec{r}}_i) >= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_1^\tau dt\frac{d}{dt}\sum_i m_i(\vec{r}_i\dot{\vec{r}}_i) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left[\sum_i m_i(\vec{r}_i\dot{\vec{r}}_i)\right]_0^\tau \longrightarrow_{\tau\to\infty} 0$$

$$\Longrightarrow < T >= -\frac{1}{2} < \sum_i m_i\vec{F}_i >$$

(Clausius'sches Virial)

Beispiele:
1.) Potentiale $U_{ij} = c_{ij}r_{ij}^n$ mit $n \in Z$ Virial: $< T >= \frac{n}{2} < U >$
2.) System von gekoppelten harm. Oszillatoren $U_{ij} = \frac{1}{2}k_{ij}r_{ij}^2$ Virial: $< T >=< U >$ $(n = 2)$
3.) $\frac{1}{r}$ Potentiale $2 < T >= - < U >$ und $E =< T + U >= - < T >$

2 Analytische Mechanik

Lagrangefunktion:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Wirkungsintegral:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t)$$

Hamiltonprinzip:
Zu zwei Zeiten t_1 und $t_2 > t_1$ nehme ein System die Konfigurationen $q^{(1)} \equiv q(t_1)$ und $q^{(2)} \equiv q(t_2)$ ein. Die Dynamik des Systems von der Konfiguration $q^{(1)}$ zur Konfiguration $q^{(2)}$ verläuft stets so, dassdie Wirkung $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t)$ einen Extremwert annimmt. (Prinzip der stationären Wirkung.
Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Verallgemeinerte Impuls:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Longrightarrow \dot{p}_{\frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

Gilt $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, sprich q_i tritt in der Lagrangefunktion nicht explizit auf, so heißt q_i zyklische Koordinate und der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls ist eine Erhaltungsgröße.

2.1 Erhaltungssätze

Nöter Theorem

Jeder Symmetrie der Lagrangefunktion (bzw. des Wirkungsintegrals), d.h. jeder Invarianz von L unter einer stetigen Transformation entspricht ein Erhaltungssatz.

Beispiele

$\Rightarrow$ Invarianz unter einer zeitlichen Transformation (Homogenität der Zeit)
$\rightarrow$ Energieerhaltungssatz.
$\Rightarrow$ Invarianz unter einer räumlichen Transformation (Homogenität des Raumes)
$\rightarrow$ Impulserhaltungssatz.
$\Rightarrow$ Invarianz unter einer räumlichen Drehung (Isotropie des Raumes)
$\rightarrow$ Drehimpulserhlaungssatz.

2.2 Schwingungen

2.2.1 freie eindimensionale Schwingung

Potential mit einem Minimum. Betrachtung kleiner auslenkungen aus einer Gleichgewichtslage q_0. $x = q - q_0$
Entwicklung von $U(q)$: $U(q) = U(q_0) + U^{'}(q_0)(q - q_0) + \frac{1}{2}U^{''}(q_0)(q - q_0)^2 + \dots$
Minimum des Potentials bei q_0: $U^{'}(q_0) = 0$; $U(q) = U(q_0) + \frac{k}{2}(q - q_0)^2$ (harm. Näherung)
Kinetische Energie: $T = \frac{a(q)}{2}\dot{q}^2 \approx \frac{m}{2}\dot{x}^2$ (Näherung von $a(q)$ mit $a(q_0)$ und $m := a(q_0)$)
Damit ergibt sich die Lagrangefkt. des harm. Oszillators

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

Lagrangegleichung:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ω ist die Eigenfrequenz des Systems.

2.2.2 Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

(kommt spaeter, da anscheinend nicht Klausurrelevant)